$= \lambda_1 + (\lambda_2 - \lambda_1)t + (\lambda_3 - \lambda_2 + \lambda_1)t^2$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 - \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 - \lambda_2 + \lambda_1 = 0 \end{cases} \text{ SEL } \Longrightarrow \begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \end{matrix}$$ i.e. $\mathcal{B}$ est libre!

Comme $\dim(\mathbb{P}_2) = 3 = \#(\mathcal{B}) \Longrightarrow \mathcal{B}$ est base!

$\boxed{\text{PROP. 7.15}}$

— o —

$\boxed{\text{THM 7.16}}$ Si $\mathcal{F} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p\}$ est une famille libre d'un EV V. Alors, il existe $\bar{v}_{p+1}, \dots, \bar{v}_n \in V$

tels que $\{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p, \bar{v}_{p+1}, \dots, \bar{v}_n\}$ est une base de V

⚠ On n'a pas d'algorithme pour trouver $\bar{v}_{p+1}, \dots, \bar{v}_n$!

EXM 7.17 Soit $\mathcal{F} = \left\{ \begin{array}{cc} \bar{v}_1 & \bar{v}_2 \\ \shortparallel & \shortparallel \\ \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, & \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \end{array} \right\}$.

On admet que $\mathcal{F}$ est libre. Comment peut-on trouver un $\bar{v}_3$ t.q. $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ soit base de $\mathbb{R}^3$?

On veut $\bar{v}_3$ qui ne soit pas C.L de $\bar{v}_1$ et $\bar{v}_2$.

$$\begin{pmatrix} 4\lambda_1 \\ 3\lambda_2 \\ -3\lambda_1+2\lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Si $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Alors $\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ * \end{pmatrix}$ avec $* \neq -1$ n'est pas C.L de $\bar{v}_1$ et $\bar{v}_2$!

Par exemple $\bar{v}_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ nous donne que $\{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\}$ est base !!

$\boxed{\text{THM 7.18}}$ Soit $T : V \to V'$ AL, $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_r\} \subseteq V$

une famille. On écrit $T(\mathcal{F}) = \{T(v_1), \dots, T(v_r)\} \subseteq V'$.

(LL) $T(\mathcal{F})$ libre $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ libre.

(LIL) $\mathcal{F}$ libre & T injective $\Rightarrow$ $T(\mathcal{F})$ libre

(GLI) $\mathcal{F}$ génératrice et $T(\mathcal{F})$ libre $\Rightarrow$ T injective

(GS) $T(\mathcal{F})$ génératrice $\Rightarrow$ T surjective

(GSG) $\mathcal{F}$ génératrice & T surj $\Rightarrow$ $T(\mathcal{F})$ génératrice.

(Preuve) (LL) par vous!!

$\underbrace{T(\mathcal{F}) \text{ libre}}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{F}$ libre

$\hookrightarrow$ Par déf : $\lambda_1 T(v_1) + \dots + \lambda_r T(v_r) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_r = 0$

$$= T(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r) \qquad \lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$$

Or, on veut montrer que $\{v_1, \dots, v_r\}$ est libre.

Il faut montrer que

$$\mu_1 v_1 + \dots + \mu_r v_r = 0 \implies \boxed{\mu_1 = \dots = \mu_r = 0}$$

(pour $\mu_1, \dots, \mu_r \in \mathbb{R}$)

On suppose alors $\mu_1 v_1 + \dots + \mu_r v_r = 0$.

Alors

PROP d'AL

$$\underbrace{T(\mu_1 v_1 + \dots + \mu_r v_r)} = T(0) \overset{\text{PROP d'AL}}{=} 0$$

$$\overset{\text{Test ALS}}{=} \mu_1 T(v_1) + \dots + \mu_r T(v_r)$$

Comme $T(\mathcal{E})$ libre, alors $\boxed{\mu_1 = \dots = \mu_r = 0}$

i.e.

Calcul de base de Ker (A)

THM. 7.20 Si $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, alors

$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) \left(\overset{\text{déf}}{=} \dim\{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : A.\bar{x} = 0\}\right)$$
$$= \#\left\{\begin{array}{c}\text{variables libre du SEL} \\ A.\bar{x} = 0\end{array}\right\}$$

EXM 7.19* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

On veut résoudre

$(*) \quad A \cdot \bar{x} = \mathbb{0}$ $\xleftrightarrow{\text{ou}}$ $A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

de façon explicite

- Calculer les solutions de $(*)$.

La FER de A est

$$\begin{array}{ccccc} & & x_3 & & x_5 \text{ var libres} \\ \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x_1 \quad + 2x_3 + x_5 = 0 \\ x_2 - x_3 - x_5 = 0 \\ x_4 - x_5 = 0 \end{cases}$$

$\sqcup_{x_1}$ $\sqcup_{x_2}$ $\sqcup_{x_4}$ var liées

$$\Longrightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_3 - x_5 \\ x_2 = x_3 + x_5 \\ x_4 = x_5 \end{cases}$$

Un élément qc.q du noyau de A est de la forme

$$\begin{pmatrix} -2x_3 - x_5 \\ x_3 + x_5 \\ x_3 \\ x_5 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Base de Ker}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Calcul d'une base de Img(A)

Déf. 7.23 Soit $A = [\underbrace{\bar{a}_1 \dots \bar{a}_n}_{\text{colonnes de } A\ (\in \mathbb{R}^m)}] \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

On dit que la i-ème colonne de A est une <u>colonne-pivot</u> si la i-ème de la FER de A contient un pivot.

THM. 7.25 Les colonnes-pivot de A forment une base de $\mathrm{Img}(A) = \{A\cdot\bar{x} : \bar{x} \in \mathbb{R}^n\}$

⚠ les colonnes avec des pivots de la FER de A ne donnent pas (forcément) une base de $\mathrm{Img}(A)$

Exemple 7.24

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$

Calculer base de $\mathrm{Img}(A)$.

La FER de A

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Alors $\left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ base de $\mathrm{Img}(A)$.

App. Si $\mathcal{F} = \{\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_p\}$ famille génératrice de $\mathbb{R}^m$.

pivots

Si l'on applique la méthode précédente à la matrice

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_1 & \dots & \bar{v}_p \end{bmatrix}$$

On trouve une base $\mathbb{R}^m$ incluse dans $\mathcal{F}$. □

Le THM du rang

THM 7.32 Si $T : V \to V'$ est A.L, alors

$$\dim(\mathrm{Ker}(T)) + \dim(\mathrm{Img}(T)) = \dim(V).$$

THM. 7.34 Si $A \in \mathbb{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$, alors

$$\dim(\mathrm{Ker}(A)) + \dim(\mathrm{Img}(A)) = n.$$

EXM. 7.33

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & -2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

On calcule $\dim(\mathrm{Ker}(A)) = 2 = \#$ var libres de $A\bar{x} = 0$

Alors

$$\dim(\mathrm{Img}(A)) = 5 - \dim(\mathrm{Ker}(A)) = 3 \quad \square$$